用 C 程序解一元三次方程的根

朱超武[1]　赵青波[2]

（三门峡职业技术学院公共教学部　河南三门峡市　472000）

摘要：本文介绍了高等数学的近似计算方法中切线法和二分法的思想，再利用其思想结合 C 程序设计语言，编写出了求一元三次方程根的程序，该程序稍加修改，即可成为求更高次方程根的程序。

关键词：二分法；切线法；方程求根

0 在数学中，一元三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$至少有一个实根，虽有公式求解，但既要开平方，又要开立方，且计算尤其复杂。由于$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$是连续且二阶可导函数，我们若利用近似计算中的切线法或二分法[1]，再利用 C 程序设计编程求解，此方程的根就好求了。

1 先来看用二分法求解，二分法的基本思想是利用中间值定理，即对于实系数一元 n 此方程 f(x)=0，如果 a<b 时，则有$f(a)\cdot f(b)<0,$在区间（a,b）中，至少有方程 f(x)=0 的一个根存在[2].具体做法是：先输入范围$x_1=a, x_2=b$的值，再求出$f(x_1)$和$f(x_2)$,若$f(x_1)\cdot f(x_2)>0,$则重新输入x_1、x_2的值，直到$f(x_1)\cdot f(x_2)<0$为止.然后求出x_1和x_2的中点$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$及$f(x_0)$.若$f(x_0)=0,$则x_0即为方程的根，否则此时要判断$f(x_1)\cdot f(x_0)$的符号：若$f(x_1)\cdot f(x_0)<0,$则方程的根应在$[x_1,x_0]$中，用x_0代替x_2，$f(x_0)$代替$f(x_2)$；若$f(x_1)\cdot f(x_0)>0,$则方程的根应在$[x_0,x_2]$中，用x_0代替x_1，$f(x_0)$代替$f(x_1)$.在新的区间$[x_1,x_2]$中，根的范围已比开始时缩小了一半，对新的区间$[x_1,x_2]$重复上述过程，由此可得一系列区间：$[a_1,b_1],[a_2,b_3],[a_3,b_3],\cdots,[a_n,b_n],$其中后一区间都是前一区间的一半，区间$[a_n,b_n]$的长度为$|b_n-a_n|=\dfrac{|b-a|}{2^n},$当 n 足够大时，使得$|b_n-a_n|$足够小，我

们即可取$x_0=\frac{a_n+b_n}{2}$作为方程$f(x_0)=0$的近似根.因为若设 c 为方程$f(x_0)=0$的根，则显然有$a_n \le c \le b_n, a_n \le x_0 \le b_n$, 故$|x_0-c| \le |b_n-a_n|=\frac{|b-a|}{2^n}$成立，所以$f(x_0) \to f(c)=0 (n \to \infty)$, 由此推得二分法的可行性。

二分法是求实根的近似计算中行之有效的最简单的办法，它只要求函数是连续的即可，使用范围很广，且便于在计算机上实现.但是它不能求重根，也不能求虚根[2].

下面给出用二分法求一元三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0(a \ne 0)$近似根的 c 语言程序[4].

```
# include <math.h>
main()
{float a,b,c,d;
    float xo x1,x2,f0 f1,f2;
    printf("请输入方程系数  a,b,c,d;");
    scanf("%f,%f,%f,%f",&a,&b,&c,&d");
    do
    {printf("请输入变量的有效范围  x1,x2:");
    scanf("%f,%f",&x1,&x2);
    f1=a*x1*x1*x1+b*x1*x1+c*x1+d;
        if(f1==0){x0=x1;goto loop;}
           f2=a*x2*x2*x2+b*x2*x2+c*x2+d;;
            if(f2==0){x0=x2;goto loop;}
            }while(f1*f2>0);
```

```
do
{x0=(x1+x2)/2;
    f0=a*x0*x0*x0+b*x0*x0+c*x0+d;
    if(f==0)break;
        if(f0*f1<0)
            {x2=x0;f2=f0;}
        else
            {x1=x0;f1=f0;}
        }while(fabs(f0)>=1e-5);
            loop:printf("方程的根  x=%f\n",x0);
        }
```

下面运行程序看一下：

请输入方程系数 a,b,c,d: 2,5,8,23

请输入变量的有效范围 x1,x2:-5,5

方程的根 x=-2.636943

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d:3,5,9,1

请输入变量的有效范围 x1,x2:-4,5

方程的根 x=-0.118339

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d:3,5,8,6

请输入变量的有效范围 x1,x2:-2,2

方程的根 x=-1.000000

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d:-1,1,-1,1

请输入变量的有效范围 x1,x2:0,2

方程的根 x=1.000000

下面运行程序求一下方程 $2x^3-24x+18=0$ 的根. 根据一元三次方程判别式，此方程有三个不等的实根[3].我们从[-4，4]逐个取整数作为初值来试一下.

请输入方程系数 a,b,c,d:2,0,-24,18

请输入变量的有效范围 x1,x2:-3,4/*由 $f(-3)\cdot f(4)>0$, 故重新取值*/

请输入变量的有效范围 x1,x2:-2,4

请输入变量的有效范围 x1,x2:-1,4

请输入变量的有效范围 x1,x2:0,4

请输入变量的有效范围 x1,x2:1,4

方程的根 x=3.000000/*x2=3 为准确根，可不再取 3 这个端点*/

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d:2,0,-24,18

请输入变量的有效范围 x1,x2:2,4

方程的根 x=3.000000

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d:2,0,-24,18

请输入变量的有效范围 x1,x2:-3,2/*可不取 3 的[3,4]和[-3,3]，直接取

[-3,2]*/

方程的根 x=0.791288/*x3=0.791288*/

到此为止，我们求出了方程 $2x^3-24x+18=0$ 的所有三个实根.

2 再看用切线法求解。切线法的基本思想是把一段不长的 曲线弧用这段弧上某点处的切线来近似代替，如此反复，直到切线和弧线在 x 轴上的交点的差的绝对值小于给定的小数为止[3]。具体做法是：先设定一个值 x_1 作为第一次近似根，由 x_1 求出 $f(x_1)$,过（$x_1, f(x_1)$）点作 f(x)的切线，交 x 轴于 x_2，将其作为第二次近似根，再由 x_2 求出 $f(x_2)$，过（x_2，$f(x_2)$）点作 f(x)的切线，交 x 轴于 x_3，将其作为第三次近似根，再由 x_3 求出过 $f(x_3)$，过（$x_3, f(x_3)$）点再作 f(x)的切线，……如此继续下去，直到 x_n 十分接近方程的根 c 为止。

由设定的 x_1 容易得到 x_2，因为点（$x_1, f(x_1)$）处的切线方程是 $y-f(x_1)=f'(x_1)\cdot(x-x_1)$ 令 y=0,x=x_2,及得 $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.同理，计算 x_3 时，只要用 x_2 代替切线方程中的 x_1，及得 $x_3=x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$.如此下去，当 x_{n-1} 求出后，则 $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$.上面用切线法得到的 x_n（n=1,2,3,…）,容易看出它们无限的逼近 f(x)=0 的根 c $(n\to\infty)$.事实上，由单调有界法则，故数列 $\{x_n\}$ 有极限，设其为 c_1，即 $x_n\to c_1(n\to\infty)$，显然 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都是连续函数，故有等式 $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$，得 $f(x_{n-1})=f'(x_{n-1})\cdot(x_{n-1}-x_n)$，两端分别取 $n\to\infty$ 时的极限，当 $f'(x_{n-1})\neq 0$ 时，既得 $f(c_1)=f'(c_1)(c_1-c_1)$，即 $f(c_1)=0$;当 $f'(x_{n-1})=0$ 时，显然 $f(x_{n-1})=0$,即 $f(c_1)=0$，所以 c_1 为 $f(x)=0$

的实根，但由于方程的实根是 c，故c_1=c,即$x_n \to c_1 (n \to \infty)$.进一步由等式$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$，得到$x_{n-1} - x_n = \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$，而$f'(x_{n-1})$除了至多两个值以外，均不等于零，故要使$f(x_{n-1}) \to 0$, 只需$|x_{n-1} - x_n|$足够小即可，由此推得切线法的可行性.

一般来说，x_1可以凭经验设定，但为了避免刚好取到使$f'(x_1)=0$的x_1，也可给出x_1的一个取值范围[a,b],使得 f(a)f(b)<0,且$f''(x_1)<0$时，$x_1 = a$; $f''(x_1)>0$时，$x_1 = b$[2].这样既可放心地求出方程的一个根来.而在实际操作中，即使刚好取到了使$f''(x_1)=0$的x_1也不要紧，本程序会提示重新取新的x_1.故在此程序中，为了提高程序运行速度，没有规定x_1的取值范围.

下面给出用切线法求一元三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0(a \neq 0)$近似根的 c 语言程序[4].

```
# include <math.h>
main()
{float a,b,c,d;
    float x1,x2,f1,f2;
    printf("请输入方程系数  a,b,c,d;");
    scanf("%f,%f,%f,%f",&a,&b,&c,&d");
    loop:printf("请输入变量的初值  x=");
    scanf("%f",&x1);
    do
    {x2=x1;
```

```
f1=a*x2*x2*x2+b*x2*x2+c*x2+d;
if(f1==0)break;
    f2=3*a*x2*x2+2*b*x2+c;
    if(f2==0)gotoloop;
        x1=x2-f1/f2;
    }while(fabs(x2-x1)>=1e-6);
        print("方程的根 x=%f\n",x1);
    }
```

下面运行程序看一下：

请输入方程系数 a,b,c,d:2,5,8,23

请输入变量的初值 x=5

方程的根 x=-2.636943

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d:3,5,9,1

请输入变量的初值 x=10

方程的根 x=-0.118339

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d:3,5,8,6

请输入变量的初值 x=5

方程的根 x=-1.000000

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d:-1,1,-1,1

请输入变量的初值 x=5

方程的根 x=1.000000

下面运行程序求一下方程 $2x^3-24x+18=0$ 的根.根据一元三次方程判别式，此方程有三个不等的实根[3].我们从[-3,3]逐个取整数作为初值来试一下.

请输入方程系数 a,b,c,d:2,0,-24,18

请输入变量的初值 x=-3

方程的根 x=-3.791288/* x_1=-3.791288*/

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d: 2,0,-24,18

请输入变量的初值 x=-2

此时 $f''(-2)=0$，故要求输出下一个 x*/

请输入变量的初值 x=-1

方程的根 x=0.791288/* x_2 =0.791288*/

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d: 2,0,-24,18

请输入变量的初值 x=0

方程的根 x=0.791288

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d: 2,0,-24,18

请输入变量的初值 x=1

方程的根 x=0.791288

再运行一次：

请输入方程系数 a,b,c,d: 2,0,-24,18

请输入变量的初值 x=2

此时 $f''(2)=0$，

方程的根 x=0.791288，故要求输出下一个 x*/

请输入变量的初值 x=3

方程的根 x=3.000000/* x_3 =3 为准确根*/

到此为止，我们求出了方程 $2x^3-24x+18=0$ 的所有三个实根.

比较切线法和二分法的程序，各有所长和不足.切线法不需要给出变量的范围，只要给出变量的初值即可，运行速度较快，但由于要利用函数的导数，有可能使公式中分母的导数值为零，此时需要重新输入新的变量值.而二分法只需要函数连续即可，只要两端点的函数值异号，就可求出方程的根，但由于要给出变量的范围，故运行速度较切线法稍慢.通过观察还可以看出，这两种方法的程序，当多定义几个方程中各次项的系数，改变一下函数的形式，稍加修改后，即可成为求一元四次方程、一元五次方程，甚至一元 n 次方程根的程序，因此有一定的代表性和实用性.

参考文献：
[1]高等数学（第五版）[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
[2]王文才，施桂芬.数学小词典[M].北京：科学技术文献出版社，1983.
[3]数学手册编写组，数学手册[M].北京：人民教育出版社，1979.
[4]谭浩强.c 程序设计（第三版）[M].北京：清华大学出版社，2007.